# 《决胜 GCT 数学基础篇》同步配套课程

## 高频考点精讲班 高数部分 讲义

目录


高频考点一：极限的性质及运算.......................... 2
高频考点二：连续与无穷的概念与计算.................... 6
高频考点三：导数的概念与计算......................... 10
高频考点四：中值定理、泰勒公式和洛必达法则........... 14
高频考点五：函数的增减性、极值和最值................. 18
高频考点六：曲线的凸凹、拐点和渐近线................. 22


# 高频考点一：极限的性质及运算

## 一、内容回顾

### （一）函数的概念

**定义 1.1** 设$x$和$y$是两个变量，$D$是给定的数集,如果对于每个数$x\in D$,变量$y$按照一定的法则总有一个确定的数值与它对应,则称$y$是$x$的**函数**,记作$y=f(x)$.数集$D$叫做这个函数的定义域，$x$叫做自变量，$y$叫做因变量.

**定义 1.2** 设$y=f(u)$,定义域为$D_u$;$u=\varphi(x)$,定义域为$D_x$,值域为$W_u$.当$W_u$时,称$y=f[\varphi(x)]$为$x$的**复合函数**,它是由$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的函数,它的定义域为$D_x$ ,称$u$为中间变量。

**定义 1 .3** 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所构成的并用一个式子所表示的函数,称为**初等函数**.

### （二）函数的四性

(1) 函数的有界性

设函数$f(x)$在区间$I$上有定义，如果$M>0$使得对 " $x\in I$ 有$|f(x)|\le M$，则称$f(x)$在区间$I$上有界 .否则,称$f(x)$在区间$I$上无界 .

(2) 函数的单调性

设函数$f(x)$在区间$I$上有定义，如果$x_1,x_2\in I$,且$x_1<x_2$时,有$f(x_1)\le f(x_2)$ (或$f(x_1)\ge f(x_2)$) ,则称$f(x)$在区间$I$上是单调递增(或单调递减)的.

(3) 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域$X$关于原点对称（即若$x\in X$，则必有$-x\in X$）.如果对于$x\in X$,有$f(-x)=f(x)$成立,则称$f(x)$为偶函数；如果对于$x\in X$，有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。



(4) 函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为$X$，如果常数$T\ne 0$，使得对$x\in X$，有$(x\pm T)\in X$, $f(x+T)=f(x)$恒成立,则称$f(x)$为周期函数,使上式成立的最小正数$T$称为$f(x)$的周期 .

### （三）数列极限的概念

**定义 2.1** 给定数列$\{x_n\}$,如果当$n$无限增大时,其通项$x_n$无限趋近于某个常数$A$,则称数列$\{x_n\}$以$A$为极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$或者$x_n \to A(n\to\infty)$.

**定义 2.2** 对于数列$\{x_n\}$

(1) 如果对于$n$，有$x_n \le x_{n+1}(x_n \ge x_{n+1})$，则称数列$\{x_n\}$是单调递增的(单调递减的).

(2) 如果$M>0$,对于$n$，有$|x_n| \le M$,则称数列$\{x_n\}$是有界的 .

（四）数列极限的性质

(1) 若数列$\{x_n\}$是收敛的,则它的极限是惟一的.

(2) 若数列$\{x_n\}$是收敛的,则$\{x_n\}$是有界的.

(3) 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$.若$A>B$,则$\exists N$,使当$n>N$时,有$x_n > y_n$;若$\exists N$,当$n>N$时，有$x_n \ge y_n$，则$A \ge B$;

（五）数列极限的公式

**1.数列极限的四则运算**

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$;

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = AB$;

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}(B \ne 0)$。

**2. 数列极限存在的准则**

(1) 单调递增有上界的数列必有极限;单调递减有下界的数列必有极限 .

(2) 夹逼准则:若$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$,且从某项开始有$y_n \le x_n \le z_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$。

## （六）函数极限基本定义及性质



**1.基本定义**

**定义 3.1**（$x$趋向无穷大时函数$f(x)$的极限）

(1) 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上有定义,$A$为常数.如果当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$的值无限趋近于$A$,则称当$x\to+\infty$时，$f(x)$以$A$为极限,记作$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$。

(2) 设函数$f(x)$在区间$(-\infty,-a]$上有定义,$A$为常数.如果当$x\to-\infty$时，函数$f(x)$的值

无限趋近于 $A$,则称当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)$ 以 $A$ 为极限.记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)(a\ge 0)$ 有定义, $A$ 为常数.如果当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于 $A$,则称当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 以 $A$ 为极限.记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

**定义 3.2** （$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限） 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域( $x_0$ 可除外)有定义.

(1) 当 $x$ 无限趋向于 $x_0(x\neq x_0)$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋向于常数 $A$,则称 $x$ 趋于 $x_0$ 时, $f(x)$ 以 $A$ 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2) 当 $x<x_0$ 且趋向于 $x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋向于常数 $A$,则称 $x$ 趋于 $x_0$ 时， $f(x)$ 的左极限为 $A$,记作 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

(3) 当 $x>x_0$ 且趋向于 $x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋向于常数 $A$,则称 $x$ 趋于 $x_0$ 时， $f(x)$ 的右极限为 $A$,记作 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

**2.函数极限的性质**

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)$ 存在,则极限值是惟一的 .

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 $x_0$ (点 $x_0$ 可除外)附近是有界的.

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时是有界的.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.如果 $A<B$,则在的某 $x_0$ 邻域内(点 $x_0$ 可除外)有 $f(x)<g(x)$;如果在 $x_0$ 的某邻域内(点 $x_0$ 可除外)有 $f(x)\le g(x)$ 则有 $A\le B$.

当 $x\to\infty$ 时,有类似的结论 .

**（七）函数极限的运算公式**

**1.函数极限的运算法则**



(1) 四则运算

(2) 夹逼定理

这两条法则与数列极限类似.

(3) 复合函数的极限法则

设复合函数 $y=f[\phi(x)]$ 在 $x_0$ 的某邻域内(点 $x_0$ 可除外)有定义.如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=u_0(x\neq x_0,\phi(x)\neq u_0)$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\phi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$。

对于 $x\to\infty$ 时,有类似的结论 .

**2.两个重要极限**

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$(或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$)。

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

**3.重要结论**

定理 3.1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

定理 3.2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$。

## 二、例题讲解

例题 1 设

$f(x)=\begin{cases}x^3, x\le 0,\\ x^2, x>0,\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, x\le 0,\\ \sqrt{x}, x>0,\end{cases}$ 则（　　）

(A) $f[g(x)]=g[f(x)]=\begin{cases}-x\sqrt{-x}, x\le 0,\\ x, x>0;\end{cases}$

(B) $f[g(x)]=|x|; g[f(x)]=\begin{cases}-x\sqrt{-x}, x\le 0,\\ x, x>0;\end{cases}$

(C) $f[g(x)]=g[f(x)]=|x|$;

(D) $g[f(x)]=|x|; f[g(x)]=\begin{cases}-x\sqrt{-x}, x\le 0,\\ x, x>0;\end{cases}$

例题 2 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\phi(x)]=1+x$, 且 $\phi(x)\ge 0$, 则$\phi(x)$是(　　)

(A) 有界函数；　(B)周期函数；

(C) 单调增加函数；　(D)单调减少函数。

例题 3 当$x\to 0$时，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是（　　）。

(A) 无穷小量;　(B) 无穷大量;

(C) 有界量非无穷小量;　(D) 无界但非无穷大量 .



例题 4 下列各式正确的是（）

（A）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=1$;　（B）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

（C）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=-\mathrm{e}$;　（D）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$;