2016 管理类联考 mba MPAcc MEM 数学公式汇总

目 录

①基本公式：

(1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

(2) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

(3) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

(4) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\text{减加}ab+b^2)$

(5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc=2(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$

(6) $=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2]$

②指数相关知识：

$a^n=a\cdot a\cdots a$ (n 个 a 相乘)　　$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$　　$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$

若 a ≥0, 则$\pm\sqrt{a}$为 a 的平方根，

指数基本公式：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$a^m/a^n=a^{m-n}$

$\left(a^m\right)^n=\left(a^n\right)^m=a^{m\cdot n}$

③ 对数相关知识：

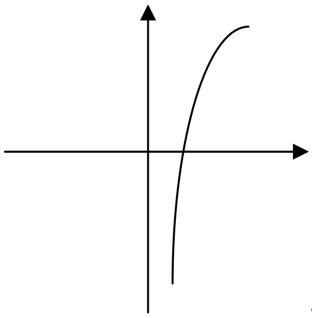
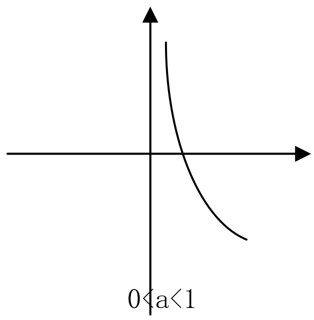
对数表示为$\log_a^b$ (a>0 且 a≠1, b>0) ，

当 a=10 时，表示为 lgb 为常用对数；

当 a=e 时，表示为 lnb 为自然对数。

有关公式：Log (MN) =logM+logN　$\log\frac{m}{n}=\log m-\log n$　$\log_{a^m}^{b^n}=\frac{n}{m}\log_a^b$

换底公式：$\log_a^b=\frac{\log_c^b}{\log_c^a}=\frac{1}{\log_b^a}$

单调性：　$a>1$　$0<a<1$

④ 有关充分性判断：题型为给出题干 P，条件① S_1 ② S_2

若 $S_1\Rightarrow P$, 而 $S_2\not\Rightarrow P$ 则题目选 A　　若 $S_1\not\Rightarrow P$, 而 $S_2\Rightarrow P$ 则题目选 B

若 $S_1\Rightarrow P$, 而 $S_2\Rightarrow P$ 则题目选 D

若 $S_1\not\Rightarrow P$, 而 $S_2\not\Rightarrow P$ 但$\begin{cases}S_1+S_2\Rightarrow P\text{则题目选}C\\S_1+S_2\not\Rightarrow P\text{则题目选}E\end{cases}$

形象表示：

① √	② ×		(A)
① ×	② √		(B)
① ×	② ×	① ②联(合)立 √	(C)
① √	② √		(D)
① ×	② ×	① ②联(合)立 ×	(E)

特点：

(1)肯定有答案，无“自检机会”、“准确性高”

(2)准确度

解决方案：

(1) 自下而上带入题干验证(至少运算两次)

(2)自上而下，(关于范围的考题)

法宝：特值法，注意只能证“伪”不能证“真”

图像法，尤其试用于几何问题

第一章 实数

一、基本概念

(1)自然数：

自然数用 N 表示(0，1，2-------)

(2) 整数Z $\begin{cases}\text{正整数 } Z^{+} \\ 0 \\ \text{负整数 } Z^{-}\end{cases}$

(3)质数和合数：

质数：只有 1 和它本身两个约数的数叫质数，注意：1 既不是质数也不是合数

最小的合数为 4，最小的质数为 2；10 以内质数：2、3、5、7；10 以内合数 4、6、8、9。

除了最小质数 2 为偶数外，其余质数都为奇数，反之则不对

除了 2 以外的正偶数均为合数，反之则不对

只要题目中涉及 2 个以上质数，就可以设最小的是 2，试试看可不可以

Eg：三个质数的乘积为其和的 5 倍，求这 3 个数的和。

解：假设 3 个质数分别为 m_1、m_2、m_3。

由题意知：$m_1m_2m_3=5(m_1+m_2+m_3)$ ←欠定方程

不妨令 $m_3=5$，则 $m_1m_2=m_1+m_2+5$

$m_1m_2-m_1-m_2+1=6$

$(m_1-1)(m_2-1)=6=1\times6=2\times3$

则 $m_1-1=2, m_2-1=3$ 或者 $m_1-1=1, m_2-1=6$

即 $m_1=3, m_2=4$（不符合质数的条件，舍）或者 $m_1=2, m_2=7$

则 $m_1+m_2+m_3=14$。

★小技巧：考试时，用 20 以内的质数稍微试一下。

（4）奇数和偶数

整数 Z $\begin{cases}奇数\ 2n+1\\ 偶数\ 2n\end{cases}$

相邻的两个整数必有一奇一偶

①合数一定就是偶数。 （×） ②偶数一定就是合数。 （×）

② 数一定就是奇数。 （×） ④奇数一定就是质数。 （×）

奇数偶数运算:偶数±偶数=偶数;奇数±偶数=奇数;奇数±奇数=偶数
奇数*奇=奇数;奇*偶=偶;偶*偶=偶
合数=质数*质数*质数*………………*质数
例：12=2*2*3=2^2*3

(5)分数：

$\frac{p}{q}$，当 p<q 时为真分数，p≥q 时为假分数，带分数(有整数部分的分数)

(6)小数：

纯小数：0.1 ； 混小数：1.1 ；有限小数； 无限小数；

(7) 实数R $\begin{cases}有理数Q\begin{cases}整数（Z）\\ 分数（\frac{m}{n}）\end{cases}\\ 无理数\end{cases}$

有理数 Q：包括整数和分数，可以知道所有有理数均可以化为$\frac{p}{q}$的形式，这是与无理数的区别，有限小数或无限循环小数均是有理数。

★无限循环小数化成$\frac{p}{q}$的方法：如果循环节有 k 位，则此小数可表示为：$\frac{循环节数字}{k个9}$ Ex：

$0.\dot{a}b\dot{c}=\frac{abc}{999}$

例 1、$0.2\dot{1}\dot{3}$=0.2131313…化为分数

分析： $0.2\dot{1}\dot{3}$=0.2+$0.0\dot{1}\dot{3}$=0.2+0.1*$0.\dot{1}\dot{3}$=$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}*\frac{13}{99}$=…

例 2、$0.\dot{a}b\dot{c}$化为最简分数后分子与分母之和为 137，求此分数

分析： $0.\dot{a}b\dot{c}=\frac{abc}{999}=\frac{26}{111}$ 从而 abc=26*9

无理数： 无限不循环小数

常见无理数：

- π 、e
- 带根号的数（根号下的数开不尽方），如√2， √3
- 对数，如$\log_2 3$

实数(R)
- 有理数(Q)
  - 有限小数
  - 无限循环小数
- 无理数：无限不循环小数

有理数
- 整数 Z
- 分数
  - 真分数（分子<分母，如 3/5）
  - 假分数（分子>分母，如 7/5）

考点：有理数与无理数的组合性质。

A、有理数(＋－×÷)有理数，仍为有理数。（注意，此处要保证除法的分母有意义）

B、无理数(＋－×÷)无理数，有可能为无理数，也有可能为有理数;无理数÷非零有理数=无理数

eg. 如果两个无理数相加为零，则它们一定互为相反数（×）。如，$\sqrt{2}$和$2-\sqrt{2}$。

C、有理数(＋－)无理数=无理数，非零有理数(×÷)无理数=无理数

(8)★连续 k 个整数之积可被 k！整除(k！为 k 的阶乘)

(9)被 k(k=2,3,4-----)整除的性质，其中被 7 整除运用截尾法。

★被 7 整除的截尾法：截去这个整数的个位数，再用剩下的部分减去个位数的 2 倍，所得结果若是 7 的倍数，该数就可以被 7 整除

同余问题

被 2 整除的数，个位数是偶数
被 3 整除的数。各位数之和为 3 倍数
被 4 整除的数，末两位数是 4 的倍数
被 5 整除的数，个位数是 0 或 5
被 6 整除的数，既能被 2 整除又能被 3 整除
被 8 整除的数，末三位数之和是 8 的倍数
被 9 整除的数，各位数之和为 9 的倍数
被 10 整除的数，个位数为 0
被 11 整除的数，奇数位上数的和与偶数位上数的和之差（或反过来）能被 11 整除
被 7、11、13 整除的数，这个数的末三位与末三位以前的数之差（或反过来）能被 7、11、13 整除

二、绝对值（考试重点）

1、绝对值的定义：其特点是互为相反数的两个数的绝对值是相等的

穿线法：用于求解高次可分解因式不等式的解集

要求：（1）x 系数都要为正

（2）奇穿偶不穿

2、实数 a 的绝对值的几何意义：数轴上实数 a 所对应的点到原点的距离

【例】充分性判断 f(x)=1只有一根

（1）f(x)=|x-1|　　（2）f(x)= |x-1|+1

解：由（1）f(x)=|x-1|=1得 $x-1=\pm1$ 两根

由（2）f(x)=|x-1|+1=1得|x-1|=0,一根　　答案：（B）

3、基本公式：|x|<a ⇔ -a<x<a　|x|>a ⇔ x>a 或 x<-a　|x|=a ⇔ x=±a

4、几何意义的扩展：|x|表示 x 到原点的距离

|x-a|表示 x 到 a(两点)的距离

|x-a|+|x-b|表示 x 到 a 的距离与 x 到 b 的距离之和，并且有最小值|a-b|，没有最大值，当 x 落入 a,b 之间时取到最小值

|x-a|-|x-b|表示 x 到 a 的距离与 x 到 b 的距离之差，并且有互为相反数的最小值-|a-b|和最大值|a-b|，当 x 在 a,b 两点外侧时取到最小值与最大值

5、性质：

对称：互为相反数的两个数的绝对值相等

等价：（1）$|a|=\sqrt{a^2}$(升次)

应用：$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

（2）$|a|^2=a^2$（去绝对值符号）

（3）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & a\ge 0\\ -a & a<0\end{cases}$

非负性（重点）：归纳具有非负性的量

$|a|\ge 0, a^2......a^{2n}\ge 0, a^{\frac{1}{2}}......a^{\frac{1}{2n}}\ge 0$

$a^{-2},a^{-4}......a^{-2n}>0$； $a^{-\frac{1}{2}},a^{-\frac{1}{4}}......a^{-\frac{1}{2n}}>0$

6、重要公式 $\frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & \text{x>0}\\ -1 & \text{x<0}\end{cases}$

【例】a,b,c都为非零实数，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}-\frac{|abc|}{abc}$有几种取值情况？

讨论：两正一负： 2

两负一正： -2

三正 2

三负 -2

7、绝对值不等式定理

★ 三角不等式：$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$形如三角形三边关系

左边等号成立的条件：$ab\le 0$ 且 $|a|\ge|b|$

右边等号成立的条件：$ab\ge 0$

第二章 整式和分式

一、内容提要

1、整式 $\begin{cases}\text{单项式：若干字母与数字之积}\\ \text{多项式：若干单项式之和}\end{cases}$

2、乘法运算

（1）单项式×单项式 $2x\cdot 3x^2=6x^3$

（2）单项式×多项式 x（2x-3）=2x^2-3x

（3）多项式×多项式（2x+3）（3x-4）=6x^2+x-12

3、乘法公式（重点）

（1）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

（2）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac$

（3）$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

（4） $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

（5） $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

4、分式：用 A,B 表示两个整式，A÷B 就可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式，如果 B 中还有字母，式子 $\frac{A}{B}$ 就叫分式，其中 A 叫做分式的分子，B 叫做分式的分母。在解分式方程的时候要注意检验是否有增根

5、有理式：整式和分式统称有理式

6、分式的基本性质：分式的分子和分母都乘以（或除以）同一个不等于 0 的整式，分式的值不变

7、分式的约分：其目的是化简，前提是分解因式

8、分式通分：目的是化零为整，前提是找到公分母，也就是最小公倍式

9、分式的运算：

加减法： $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

乘法： $\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

除法： $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

乘方： $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

10、余式的定义（重点）：被除式=除式×商+余式

F(x)=f（x）g(x)+r(x)

当 r（x）=0 时，称为整除

11、 $f(x)$含有（$x-a$）因式 $\Leftrightarrow$ $f(x)$能被$(x-a)$整除

12、二次三项式：十字相乘可以因式分解

形如 $ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{array}$$

$a_1a_2 = a$， $a_1c_2 + a_2c_1 = b$， $c_1c_2 = c$

13.因式定理

f(x)含有（ax-b）因式 $\Leftrightarrow$ f(x)可以被（ax-b）整除 $\Leftrightarrow$ f($\frac{b}{a}$)=0

f(x)含有（x-a）因式 $\Leftrightarrow$ f(a)=0

14、余式定理：

f（x）除以ax-b的余式为f($\frac{b}{a}$)

二、因式分解

常用的因式分解的方法

1、 提公因式法

【例】

$2x^3 - 12x^2y^2 + 18xy^4$

$= 2x(x^2 - 6xy^2 + 9y^2)$

$= 2x(x - 3y^2)^2$

2、公式法

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

3、十字相乘因式分解，适用于 ax^2+bx+c，见上面第 12 小点

4、分组分解法

（1）ax^2+bx+c 十字相乘

（2）ax^3+bx+c 了解内容

方法：$ax^3+bx+c = ax^3+b_1x+b_2x+c = x(ax^2+b_1)+b_2(x+\frac{c}{b_2})$ 或

$ax^3+bx+c = ax^3+bx+c_1+c_2 = ax^3+c_1+bx+c_2$

（3）ax^4+bx^2+c 设$t=x^2$将原式化为at^2+bt+c

（4）ax^3+bx^2+c

方法一、拆中间项

$= ax^3+b_1x^2+b_2x^2+c$

$= x^2(ax+b_1)+(b_2x^2+c)$

方法二

$= ax^3+c_1+bx^2+c_2$

立方公式 平方差

ex：$2x^3-13x^2+3 = 2x^3-x^2-12x^2+3$

（5）ax^5+bx+c

方法一、$ax^5+dx^3-dx^3+bx+c$

方法二、$ax^5+dx^2-dx^2+bx+c$

（6）待定系数法

多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0=0$ 的根为 a_0 的约数除以 a_n 的约数

（7）双十字相乘法

应用：$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$

$$\begin{array}{ccc} x & y & 常数 \\ a_1 & b_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & f_2 \end{array}$$

$=(a_1x+b_1y+f_1)(a_2x+b_2y+f_2)$

其中 $a_1a_2=a, b_1b_2=b, f_1f_2=f$

$a_1b_2+a_2b_1=c, a_1f_2+a_2f_1=d, b_1f_2+b_2f_1=e$

经典例题：

1. 实数范围内分解 $(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)$ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120$ 有（B）：

A. $(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)$

B. $(x-1)(x+6)(x^2+5x+16)$

C. $(x+1)(x+6)(x^2-5x+16)$

D. $(x-1)(x+6)(x^2+5x-16)$

E. 以上都不对

解答：用特殊值代入得 B 设 X=-1

2.已知 $abc\neq 0$ 且 $a+b+c=0$，则 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=$（A）

A. -3　　B. -2　C. 2　　D. 3　　E. 以上全不对

$$a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=$$

$$(\frac{a}{b}+\frac{a}{c})+(\frac{b}{a}+\frac{b}{c})+(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})=$$

解答：$$(\frac{a}{b}+\frac{c}{b})+(\frac{b}{c}+\frac{a}{c})+(\frac{c}{a}+\frac{b}{a})=$$

$$(\frac{a+c}{b})+(\frac{a+b}{c})+(\frac{b+c}{a})=$$

$$(\frac{-b}{b})+(\frac{-c}{c})+(\frac{-a}{a})=-3$$

第三章 比和比例

一、 基本定义

1. 比 $a:b=\frac{a}{b}$

2. 关系

（1）原值为 a,增长了 P%，现值为 a(1+P%)

原值为 a,下降了 P%，现值为 a(1-P%)

如果原值先增加 P%，减少多少可以恢复原值

a (1+P%)(1-x)=a　　$x=\frac{P\%}{1+P\%}<P\%$

如果原值先减少 P%，增加多少可以恢复原值

a(1-P%)(1+x)=a　　$x=\frac{P\%}{1-P\%}>P\%$

（2）比较大小

甲比乙大P%，$\Leftrightarrow \frac{甲-乙}{乙}=P\% \Leftrightarrow$ 甲=乙(1+P%)　乙比甲小 $\frac{p\%}{p\%+1}$

甲比乙少P%，$\Leftrightarrow \frac{乙-甲}{乙}=P\% \Leftrightarrow$ 甲=乙(1-P%)　乙比甲大 $\frac{p\%}{1-p\%}$

甲比乙多n个单位 $\Leftrightarrow$ 甲=乙+n

（3）甲是乙的P%，$\Leftrightarrow \frac{甲}{乙}=P\% \Leftrightarrow$ 甲=乙·P%

3.比例：

$$a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

a:b=b:c　　b 为 a、c 比例中项

4. 正比

y=kx　(k 可正可负)

二、性质

$a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$　内项积=外向积

三、重要定理

1. 更比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

2. 反比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$　（两边取倒数）

3. 合比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$　（两边加 1，通分）

4. 分比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$　（两边减 1，通分）

*5. 合分比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm mc}{b\pm md}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$

*6. 等比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$

【例】 a,b,c 为非 0 实数，且 $\frac{b+c-3a}{a}=\frac{a+c-3b}{b}=\frac{a+b-3c}{c}=m$，求 m

(1)当 $a+b+c\neq 0$ 时

由等比定理，分子分母同加减，得 m=-1

(2)当 a+b+c=0 时　a+b=-c 代入原式，得 m=-4

陷阱在分母的取值，要分开讨论

7. 增减性（比较大小）a,b,m 均大于 0

若 $\frac{a}{b}>1$　则 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}(m>0)$

若 $0<\frac{a}{b}<1$　则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$ (m>0)

四、平均值

1、算术平均值：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

2、几何平均值

要求是 n 个正数，则 $x_g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$

五、平均值定理

1、$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ 当且仅当 $x_1=x_2=\ldots=x_n$ 时，两者相等

2、n=2 时，$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

3、当$a=\frac{1}{b}$，$a+\frac{1}{a}\geq 2$

六、比较大小的方法：

1、整式作减法，与 0 比较大小 2、分式作除法，与 1 比较

技巧方法：1、特值法 2、极端法（趋于 0 或无穷大）

【例】$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$，且 a+b+c=27，求 a-2b-2c

由题意可知，a:b:c=2:3:4，$\frac{a+b+c}{a}=\frac{2+3+4}{2}=\frac{9}{2}$，可得 a=6，b=9，c=12

算出 a-2b-2c=-36

第四章 方程 不等式

方程

一、基本定义：

1、元：方程中未知数的个数 次：方程中未知数的最高次方数

2、一元一次方程

Ax=b 得 $x=\frac{b}{a}$

3、一元二次方程

ax^2+bx+c=0（a≠0） ⇔ 一元二次方程 ax^2+bx+c=0，因为一元二次方程就意味着 a≠0。

当$\Delta=b^2$-4ac>0 时，方程有两个不等实根，为 $X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$。

当$\Delta=b^2$-4ac=0 时，方程有两个相等的实根。

当$\Delta=b^2$-4ac<0 时，方程无实根。

一元 n 次方程根的情况：一元二次方程中带根号的根是成对出现的，一元三次方程至少有一个有理根，或者说奇数次方程至少有一个有理根

二、重要公式及定理

1、 一元二次方程 ax^2+bx+c=0 的解法

（1） 因式分解：十字相乘（Δ为完全平方数）

（2） 求根公式 $X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

2、 抛物线 y=ax^2+bx+c 图像的特点及性质

y=ax^2+bx+c（抛物线），则①开口方向由 a 决定：a>0 时，开口向上，a<0 时，开口向下②c 决定与 y 轴的交点③对称轴 x=$-\frac{b}{2a}$，对称轴左右两侧单调性相反④两根决定了与 x 轴交点⑤$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$代表抛物线在 x 轴上截取的长度⑥顶点坐标$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$⑦当Δ>0 时，有两个不等实根，Δ=0，有两个相等实根，Δ<0 时，无实根⑧恒正：a>0，Δ<0；恒负：a<0，Δ<0

三、根与系数关系（韦达定理）

如果 x_1、x_2 是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$，注意：韦达定理不仅对实根是适用的，对虚根也适用

韦达定理的扩展应用：

（1）$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$ 与 a 无关

（2）$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$

（3）$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

（4）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

（5）$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$
$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$

考试题型

1、题型一 $ax^2+bx+c=0$ 的根的分布情况

（1）有两个正根 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0, x_1x_2=\frac{c}{a}>0$，$\Delta\geq 0$

（2）有两个负根 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0, x_1x_2=\frac{c}{a}>0$，$\Delta\geq 0$

（3）一正一负根 $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$ 即 a 和 c 异号即可；

如果再要求|正根|>|负根|，则再加上条件 a，b 异号；

如果再要求|正根|<|负根|，则再加上 a，b 同号

（4）一根比 k 大，一个根比 k 小 af(k)<0

2、对数方程，不等式的应用

方程：$\log_a^{f(x)}=\log_a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)>0$

不等式：a>1 时 $\log_a^{f(x)}>\log_a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$

0<a<1 时 $\log_a^{f(x)}<\log_a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$

指数相关知识：$a^n=a\cdot a\cdots a$（n 个 a 相乘）　$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$　$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$

对于 $a^{\frac{1}{n}}$，若 n 为正偶数，则 a≥0；若 n 为正奇数，则 a 无限制；若 n 为负偶数，则 a>0；若 n 为负奇数，则 a ≠0。

若 a ≥0，则 $\pm\sqrt{a}$ 为 a 的平方根，负数没有平方根。

指数基本公式：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　$\left(a^m\right)^n=\left(a^n\right)^m=a^{m\cdot n}$ 其他公式查看手册

题型三、韦达定理的应用

不等式

不等式的性质：

1、同向皆正相乘性

$$\left.\begin{array}{l}a>b>0\\c>d>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd$$

2、 皆正倒数性

$a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$

3、 $\left.\begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

4、 $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

不等式解集的特色：解集端点的值代入不等式时，不等式左边等于右边。

一、一元一次不等式

$ax + b \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$

①$ax < -b$ 若，a>0 时 $x < -\frac{b}{a}$

a<0 时 $x > -\frac{b}{a}$

②$ax > -b$ 若，a>0 时 $x > -\frac{b}{a}$

a<0 时 $x < -\frac{b}{a}$

$\frac{2x+1}{3x-2} < 1$ 移向通分得：$\frac{2x+1}{3x-2} - 1 = \frac{3-x}{3x-2} < 0$

$(3-x)(3x-2) < 0$

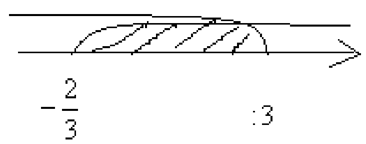
二、含绝对值的不等式

$|3x+2| < 1 \qquad -1 < 3x+2 < 1$

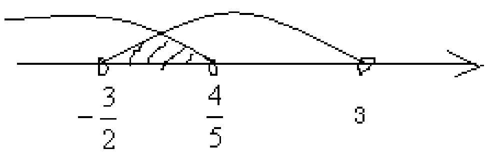
$|3x+2| > 1 \qquad 3x+2 > 1或3x+2 < -1$

三、一元一次不等式组

$\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 3x-2 < 7 \end{cases}$ 求交集得 $\begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x < 3 \end{cases}$

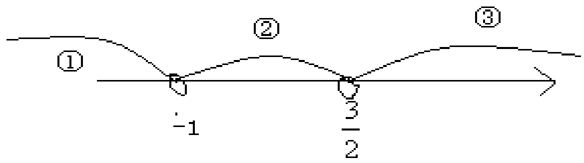


$\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 3x-2 < 7 \\ 5x-4 < 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < 3 \\ x < \frac{4}{5} \end{cases} \rightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{4}{5}$



$|x+1|+|2x-3|<10$

临界点为-1，$\frac{3}{2}$



① x<-1 时， 解得 $-\frac{8}{3}<x<-1$

② -1≤x≤$\frac{3}{2}$时， 解得 -1≤x≤$\frac{3}{2}$

③ x≥$\frac{3}{2}$时，$\frac{3}{2}$<x<4

合并①②③得，$-\frac{8}{3}<x<4$

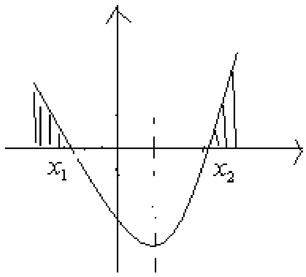
性质：1. a>b>0， $a^2>b^2$

2. a<b<0， $a^2>b^2$

四、一元二次不等式

$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$

注：将系数调整为正数后在求解



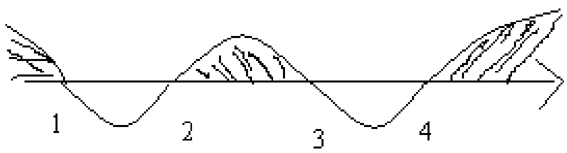
① $ax^2+bx+c>0$ 时，a>0 时， $x>x_2, x<x_1$

② $ax^2+bx+c<0$时，a>0 时， $x_1<x<x_2$

解高次不等式：

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$或<0

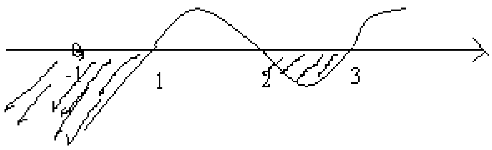
方法：穿针引线法(由右上开始往下穿)



注：偶次方先穿时，不考虑，穿后考虑特殊点；

奇次方不考虑全看为一次。

$(x+1)^2(x-1)(x-2)^3(x-3)$<0



x<1 且 x≠-1，或 2<x<3

▲ 类似于|ax+b|±|cx+d|>e 的不等式，可以分段讨论，但计算量大，这时使用折线法，限于一次方程，步骤如下：

① 根据 ax+b=0, cx+d=0 求出折点

$$|a|\pm|c|\begin{cases}>0,\text{向上折}\\=0,\text{水平}\\<0,\text{向下折}\end{cases}$$

一些图像的画法

y=|ax+b|, 下翻上，把原下方图像上翻后去掉原下方

y=|ax|+b, 右翻左，把右边翻到左边，去掉原来左边的

|y|=ax+b, 上翻下，原来下方去掉

五、超级不等式：指数、对数问题

（1）对数的图像要掌握

方程：$\log_a^{f(x)}=\log_a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)>0$

不等式：a>1 时 $\log_a^{f(x)}>\log_a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$ 单调递增

0<a<1 时 $\log_a^{f(x)}<\log_a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$ 单调递减

对于 $a^{\frac{1}{n}}$，若 n 为正偶数，则 a≥0；若 n 为正奇数，则 a 无限制；

若 n 为负偶数，则 a>0；若 n 为负奇数，则 a ≠0。

若 a ≥0, 则 $\pm\sqrt{a}$ 为 a 的平方根，负数没有平方根。

第五章 应用题

一、比、百分比、比例

（1）知识点

利润=售价-进价 利润=出厂价-成本

利润率=$\dfrac{\text{利润}}{\text{进价（成本）}}$ 变化率=$\dfrac{\text{变化量}}{\text{变前量}}$

技巧（思路）思维

方法：特值法

如果题目中出现必需涉及的量，并且该量不可量化，则此量一定对结果无影响。可引入一个特殊值找出普遍规律下的答案。

1、 用最简洁最方便的量作为特指

2、 引入特指时，不可改变题目原意

3、 引入两个特值时需特别注意， 防止两者间有必然联系而改变题目原意

讲义 P131/例 20

一般方法：

$$\begin{cases} x+y=50 \\ 90x+75y=50\times 81 \end{cases}$$

十字相交法：优秀　90　　　　6

　　　　　　　　　81　　　　人数比 $\frac{优}{非优}=\frac{2}{3}$

非优秀　75　　　　　　9

非优=$\frac{3}{5}\times 50$=30

十字交叉法的使用法则

1、 标清量

2、 放好位 （减得的结果与原来的变量放在同一条直线上）

3、 大的减小的

题型归纳

1． 增长率（变化率问题）2.利润率 3.二因素平均值　4.多比例问题

5.单量总量关系　6.比例变化 7.比例性质

二、工程问题　（总量看成 1）

（1）知识点

工量=功效*工时　　（效率可以直接相加减）

工量定时，工效、工时成反比

工效定时，工量、工时成正比

工时定时，工量、工效成正比

纵向比较法的使用范围：

如果题目中出现两条以上可比较主线，则可用

纵向比较法的使用法则：

1、 一定要找到可比较的桥梁

2、 通过差异找出关系并且利用已知信息求解

工程问题题型：

效率计算;纵向比较法;给排水问题;效率变化问题

三、速度问题

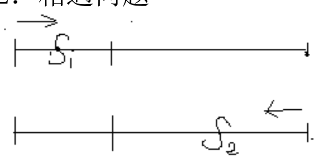
知识点：

1． S=vt

S 表示路程（不是距离或位移），v 匀速，t 所用时间

s 定，v、t 成反比;v 定，s、t 成正比;t 定，s、v 成正比

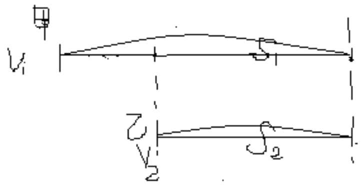
2．相遇问题



S 为相遇时所走的路程;S 相遇=s1+s2=原来的距离;V 相遇=v1+v2

相遇时所用时间 $t=\dfrac{S_{相遇}}{V_{相遇}}$

3. 追击问题



S 追击=s1-s2 （走的快的人比走的慢的人多走的路程）
V 追击=v1-v2

4. 顺水、逆水问题
V 顺=v 船+v 水
V 逆=v 船-v 水 （V 顺-V 逆=2 v 水）

例 16. 公共汽车速度为 v，则有 $\dfrac{160}{v}-\dfrac{160}{v+80}=2\dfrac{2}{3}$ 得 v=40；最好用中间值代入法

中间值代入的适用范围：
往往在速度问题中，得到分母出现未知数，并且不可以简单化解的方程，此时最有效的方法是中间值代入法，而回避解一元二次方程。
使用法则：
用中间值代入而非中间答案
同等条件下用最简洁最方便的代入
如果第一次代入后不符合题意，则一定要判断准答案的发展方向。

例 17. （$V_{卡}$+60）6=（48+$V_{卡}$）7 得$V_{卡}$=24
（$V_{卡}$+60）6=（$V_{丙}$+24）8 得$V_{丙}$=39

例 20. 第一次相遇：小明走了 500，小华走了 S-500；
第二次相遇：小明走了 S+100，小华走了 S-100
$$\frac{500}{S\text{-}500}=\frac{S+100}{S-100}\Rightarrow S=900$$
第一次相遇：小明和小华走了 S；第二次相遇：小明和小华走了 2S
说明第二次 2 个人走的都是第一次的 2 倍;对于小明来说：S+100=2×500 $\Rightarrow$S=900

例 21. 设船速 v，水速 x，有
$$\frac{120}{v+x}+\frac{80}{v-x}=16$$
$$\frac{60}{v+x}+\frac{120}{v-x}=16$$ 解得 $x=2.5$

速度问题题型总结：
1. s=vt（中间值代入法）

2. S 相遇=s1+s2，V 相遇=v1+v2　　3. 顺水逆水问题

四、浓度问题

知识点：定义：浓度=$\frac{溶质}{溶液}$ 溶液=溶质+溶剂

溶质=浓度×溶液

溶液=$\frac{溶质}{溶度}$

例 24.属于补水（稀释）问题

第一次剩下纯：$(x-20)\bullet 60\%$　　浓度：$\frac{(x-20)\bullet 60\%}{x}$

第二次倒出纯：$\frac{(x-20)\bullet 60\%}{x}30$　剩下纯：$(x-20)\bullet 60\%-30\frac{(x-20)\bullet 60\%}{x}$

浓度为：【$(x-20)\bullet 60\%-30\frac{(x-20)\bullet 60\%}{x}$】/x=20%$\Rightarrow$x=60

通用公式：

倒两次：$\frac{原浓度(v-a)(v-b)}{v^2}=后浓度$

倒三次：$\frac{原浓度(v-a)(v-b)(v-c)}{v^3}=后浓度$

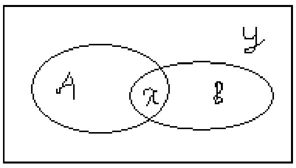
v 为原来溶液的量，a 为第一次倒出的量，b 为第二次倒出的量………

题型归纳；

浓度计算；补水问题

五、画饼问题

1. 两饼相交

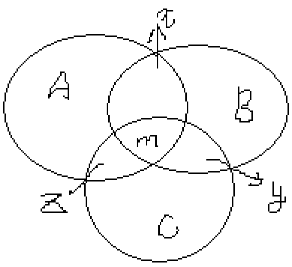


总=A+B-x+y

例 25.设只有小提琴人数为 5x，则总人数=46=22+5x+3x-3x+14　　得 x=2

只会电子琴的=22-6=16

2. 三饼相交



总=A+B+C-x-y-z+m

例 28.总=$3\bullet 30$-5-6-8+3=74

六、不定方程

1. 最优化方案选择的不定方程； 2. 带有附加条件的不定方程

3. 不等式形式的不定方程

步骤：

1. 要勇敢的表达出方程 ；2. 观察方程和附加条件拉关系；3. 求解（穷举法）

例 27. 设一等奖，二等奖，三等奖人数为 a，b，c，则有

一 二 三

a b c（a，b，c 为正整数）

6a+3b+2c=22

9a+4b+c=22 得 a≤2 接着穷举法

当 a=1 时，b=2，c=5

当 a=2 时，不符题意

最优化方案选择题目的解决方案：

1、找到制约最优的因素（稳，准，狠）；2、判定什么情况下最优；3、求解

不等式形式的不定方程解决方案：

列出不等式

通过不等式组求出解得范围

根据附加条件判定具体解集

例 29. 东欧>2/3 欧美 $\Rightarrow$ 欧美<15 个

欧美>2/3 总数 $\Rightarrow$ 总数<3/2 欧美 $\Rightarrow$ 总数少于 21

亚太<1/3 总数 $\Rightarrow$ 总数>18

七、阶梯价格问题

图表型、语言描述型

做题步骤：1. 分段找临界；2. 确定区间；3. 设特殊部分求解

例 30.

少于 1 万	1 万-1.5 万	1.5 万-2 万	2 万-3 万	3 万-4 万
0	125	150	350	400

125+150+350+x •4%=770 x=3625

第六章 数列

一、等差数列

$a_{n+1}-a_n=$常数，则$\{a_n\}$为等差数列，公差$d=$常数

1、$a_n=a_1+(n-1)d$ 通项公式

$=a_k+(n-k)d$ 起始项不是第一项，

$=dn+(a_1-d)$关于 n 的函数，说明等差数列通项是关于 n 的一次函数，公差为 n 的系数。

注：$a_n=3$是等差数列，为常数列，通项就是该常数，常数列是数列题特值法的首选。

2、$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=n\cdot\dfrac{a_1+a_n}{2}=n\cdot\dfrac{\text{已知}}{\text{项数}}$

求 S 几就是脚码乘以一个数，$S_{13}=13\cdot X$

二、等比数列

等比数列通项是关于 n 的指数函数，

【补例】$a_n=\frac{3^n}{2^{n+1}}$ 是等比数列，$q=\frac{3}{2},a_1=\frac{3}{4}$

$=\frac{3\cdot3^{n-1}}{4\cdot2^{n-1}}=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n$，为一定有常数项的指数函数。

＊ 如果一个数列既是等差又是等比数列，则该数列为非零常数列

数学思想

1、定性排除加反向验证；

2、首选特值法和图像法；

3、充分性判断先猜后做。

【补例】$S_n=-n^2+11n$

$a_1=5,d=-2$

有最大值，在对称轴处取得，$n=\frac{11}{2}$，即 $S_5=S_6$=S 最大值

总结：$S_n=f(n)=an^2+bn$　　　对称轴：$n=\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}$

$a_1>0,d<0,S_n$ 有最大值；$a_1<0,d>0,S_n$ 有最小值

N 的取值四舍六入，例：

（1）n=5，S_5 有最值

（2）n=5.1，S_5 有最值，

（3）n=5.6，S_6 有最值，

（4）n=5.5，$S_5=S_6$ 有最值，且 $S_{11}=0,a_6=0$

总结：

（1）a_n 为 n 的一次函数

（2）S_n 为 n 的无常数项的二次函数

（3）若 $\{a_n\}$ 为常数列，a_n 退化为常数，S_n 退化为 n 的一次函数，如 $a_n=3$，$S_n=3n$

【补例】$\{a_n\},\{b_n\}$ 前 n 项和为 S_n,T_n，则 $S_{19}:T_{19}=3:2$

（1）$\{a_n\},\{b_n\}$ 为等差数列

（2）$a_{10}:b_{10}=3:2$

利用 S=脚码*中间项，选 C

【补例】等差数列中 $S_9=72$，求 $a_2+a_4+a_9=$

$S_9=9\cdot a_5=72$，$a_5=8$

$a_2+a_4+a_9=3a_5=24$

【补例】$a_n=\frac{3^n}{2^{n+1}}$ 是等比数列，$q=\frac{3}{2},a_1=\frac{3}{4}$

$=\frac{3\cdot3^{n-1}}{4\cdot2^{n-1}}=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n$，为一定有常数项的指数函数。

【补例】$S_n=2^n-1$是等比数列

【补例】$S_n=-\frac{3^n}{2^{n+1}}$不是等比数列，需要配一个常数

$S_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{1}{2}$，常数与系数相反数，$q=\frac{3}{2},a_1=-\frac{1}{4}$的等比数列

注：$S_n=2^n$不是等比数列，但是只影响第一项，从第二项开始与$S_n=2^n-1$所代表的等差数列的第二项开始完全相等。

【补例】09-01-11，$a_n\neq0,a_1=\frac{1}{2},a_n=\frac{2S_n}{2S_n-1}$，则$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是

A、首项为 2，$q=\frac{1}{2}$的等比数列；B、首项为 2，$q=2$的等比数列

C、既非等差又非等比；D、首项为 2，$d=\frac{1}{2}$的等差数列

E、首项为 2，$d=2$的等差数列

$S_n-S_{n-1}=\frac{2S_n}{2S_n-1}$，万能公式

$2S_n{}^2-S_n-2S_nS_{n-1}+S_{n-1}=2S_n{}^2$

$-\frac{1}{S_{n-1}}-2+\frac{1}{S_n}=0$

答案选 E

$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$

总结：

（1）a_n为 n 的指数函数（2）S_n为 n 的有常数项的指数函数，且系数相反

（3）若$\{a_n\}$为非 0 常数列时，a_n退化为常数，S_n退化为 n 的一次函数，如$a_n=a_1=$该常数，$S_n=na_1$

（4）既成等差数列又成等比数列的一定是非 0 常数列

【补例】等差数列，$3a_5=7a_{10}$，且$a_1<0$，则S_n最小

A、S_1或S_8　　B、S_{12}　　C、S_{13}　　D、S_{15}　　E、以上都不对

$3a_5=7a_{10}$，$3\left(a_1+4d\right)=7\left(a_1+9d\right)$

$\frac{a_1}{d}=-\frac{51}{4}$　　$n=\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}=\frac{1}{2}-\frac{51}{4}=13.2$　　所以 n 取 13，答案选 C

三个数成等差：$a-d,a,a+d$

三个数成等比：a,aq,aq^2，（$\frac{a}{q},a,aq$，分式未必好处理）

四个数成等差：$a-d,a,a+d,a+2d$，（$a-3d,a-d,a+d,a+3d$，对称，但公差为$2d$，易错）

四个数成等比：$\frac{a}{q},a,aq,aq^2$，（$\frac{a}{q^3},\frac{a}{q},aq,aq^3$，对称，但公比为$q^2$，易错）

总结：

	等差数列	等比数列
1、定义	$a_{n+1}-a_n=d$	$a_{n+1}/a_n=q$
2、通项	$a_n=a_1+(n-1)d$ $a_n=a_m+(n-m)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$ $a_n=a_mq^{n-m}$
3、通项公式技巧	$a_n=dn+(a_1-d)$ （a_n是关于 n 的一次函数）	$a_n=a_1q^{n-1}$ （a_n是关于 n 的指数函数）
4、前 n 项和公式S_n	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	$q\neq1$，$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $q=1$，$S_n=na_1$
5、S_n技巧	$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$ 关于 n 的无常数项的二次函数	$S_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n$ 关于 n 的有常数项的指数函数
6、角码规律	$m+n=k+t=2x$ $a_m+a_n=a_k+a_t=2a_x$	$m+n=k+t=2x$ $a_ma_n=a_ka_t={a_x}^2$
7	a、b、c成等差，则$b=a+c$ b叫做等差中项	a、b、c成等比，则$b^2=ac$（奇数项同号、偶数项同号） b叫做等比差中项
8	$\frac{a_k}{b_k}=\frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$，$S_{2k-1}=(2k-1)a_k$	

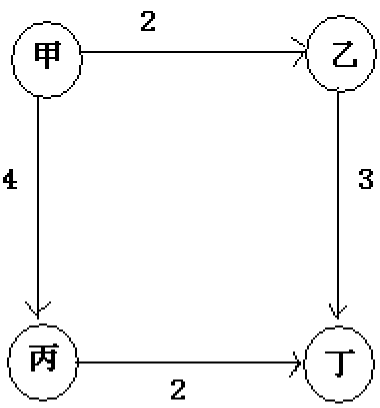
第七章 排列组合（解决计数问题）

一、两个原理

- 加法原理（分类）做一件事有 n 类办法，每一类中的每一种均可单独完成此事件，如果第一类有m_1种方案，第二类有m_2种方案....第 n 类有m_n种方案，则此事件共有方案数 $N=m_1+m_2+........+m_n$
- 乘法原理（分步） 做一件事分 n 个步骤，如果第一步有m_1种方案，第二个步骤有m_2种方案....第 n 步有m_n种方案，则做此事件的方案数$N=m_1\cdot m_2\cdot........\cdot m_n$

模型：

从甲到乙有 2 种方法；
从甲到丙有 4 种方法；
从乙到丁有 3 种方法；
从丙到丁有 2 种方法；
问从甲到丁有几种方法？



解：2*3+4*2=14

二、两个概念

排列

1、排列定义：从 n 个不同元素中，任意取出 m（$m\leq n$）个元素，按照一定顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列

2、排列数定义：从 n 个不同元素中取出 m（$m\leq n$）个元素的所有排列的种数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列数

3、$P_n^m=n(n-1)......(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ $P_n^n=n!$

n 个不同元素对应 n 个不同位置的方案总数记为 n！（一一对应）

常用的阶乘数：0！=1，1！=1，2！=2，3！=6，4！=24，5！=120

组合

- 1、组合的定义：从 n 个不同元素中，任意取出 m（$m\leq n$）个元素并为一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合，所有可能的组合的个数称为组合数 C_n^m

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}$$

常用的组合数：$C_n^0=1$ $C_n^1=n$ $C_4^2=6$ $C_6^3=20$ $C_3^1=C_3^2=3$ $C_4^1=C_4^3=4$ $C_5^2=C_5^3=10$ $C_6^2=C_6^4=15$ $C_7^2=C_7^5=21$ $C_8^2=C_8^6=28$

2、组合的性质：

（1）、只要存在选择，使用 C

（2）、只要涉及到顺序，就阶乘（不同元素对应不同位置）

（3）、$C_n^m=C_n^{n-m}$ （化简用）

（4）、$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$

（5）、$C_n^0+C_n^1+....+C_n^n=2^n$

3、二项展开式：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+.....+C_n^ra^{n-r}b^r..+C_n^nb^n$

●存在选择 C_n^m 存在对应 n！

建议：尽量画位置图 尽量具体化

各种题型总结：

⑴平均分组问题：注意要修正，看所分的组间是否有区别，无区别为平均分组，要再除以阶乘

⑵对元素或位置限定：思想是先特殊后一般

⑶相邻：捆绑法，解决元素相邻问题。步骤是先把相邻元素作为一个元素进行大排列，然后可能存在小排列

⑷不相邻：插空法，解决元素不相邻问题。先不管不相邻元素，把剩下的大元素进行大排列，然后选取间隔插空，可能存在小排列

(6)隔板法：n 个相同的元素分给 m（$m\leq n$）个人，每人至少一个名额 C_{n-1}^{m-1}

使用隔板法要满足以下三个条件

1、所要分的物品规格必须完全相同

2、所要分的物品必须分完，绝不允许有剩余

3、参与分物品的每个成员至少分到一个，绝不允许出现分不到物品的成员

每人至多一个 C_m^n

C_{m+n-1}^{m-1} 代表无任何约束的隔板问题

例：从 1，2，....，20 这 20 个自然数中任取 3 个不同的数字组成等差数列，问有（）多少个。

解：等差数列a_1,a_2,a_3，$a_2=a_1+d,a_3=a_1+2d$，可知a_1,a_3奇偶性相同。

这 20 个数中有 10 个奇数，每选的两个奇数选出后可构成 2 个等差数列，则 10 个奇数可构成等差数列的个数为P_{10}^2，同理偶数也可以构成P_{10}^2，总共 2P_{10}^2个

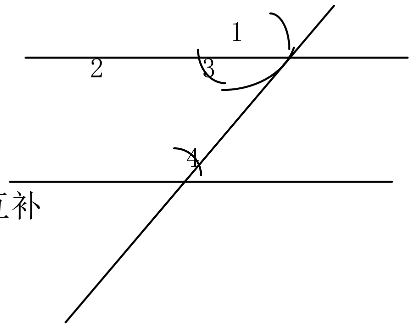
第八章 平面几何和解析几何

（▲为考点，★为重点，●为运用，＊为总结）

平面几何部分

1、平行直线

（1）一条直线与一组平行线之间的关系



$\angle 1$与$\angle 4$是同位角，同位角相等

$\angle 2$与$\angle 4$是内错角，内错角相等

$\angle 3$与$\angle 4$是同旁内角，同旁内角互补

▲ 内错角的角平分线平行；
同位角的角平分线平行；
同旁内角的角平分线垂直。

2、 多边形

★奇数条的多边形

任意多边形的外角和是360°

▲三角形

（1）三个内角和：∠A+∠B+∠C=180^o

四角形内角和为 360°

n 边形内角和为（n-2）×180°

外角：三角形外角等于不相邻两内角和

（2）三条边：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边

●例 1、已知三角形 ABC,其中 A(1,3)、B(4,6)、C 点在 x 轴上运动

求（1）C 点在何位置时，$AC+BC$值最小；

（2）C 点在和位置时，$|AC-BC|$值最大。

解：（1）错误答案：，$AC+BC>AB$，$AC+BC$最小值为 AB

分析：由于等号取不到，答案错误

正确答案：作A点关于 x 轴的对称点得A'

$AC+BC=A'C+BC\geq A'B$

$A(1,3)$、$A'(1,-3)$、$B(4,6)$、

$A'B=\sqrt{9+18}=3\sqrt{10}$

求 C 点，利用等比关系$\dfrac{6}{9}=\dfrac{CD}{3}$，$CD=2$

当点 C 在（2,0），时$AC+BC$的最小值为$3\sqrt{10}$。

（2）：作AB的延长线，C 点是AB延长线与 x 轴的交点

$|AC-BC|\leq AB=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

因此可知，当 C 点在（-2,0）时，$|AC-BC|$最大值为$3\sqrt{2}$

＊总结 1、当 A 点、B 点在坐标轴的同侧时，求 $AC+BC$ 最小值，需做对称点，
求 $\left|AC-BC\right|$ 值最大，直接连线即可。
2、当 A 点、B 点在坐标轴的两侧时，求 $AC+BC$ 最小值，直接连线即可，
求 $\left|AC-BC\right|$ 值最大，需做对称点。

（3）▲三角形的四心

① 重心：三条中线的交点，将中线分成 1：2 两段，坐标为（$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$）

② 垂心：三条高的交点。
③ 内心：内切圆圆心，三条角平分线交点，角平分线到角两边的距离相等
④ 外心：外接圆圆心，三条边的中垂线交点。

＊总结 1、内心与重心必在三角形内部。

$$2、外心与垂心\begin{cases}在三角形内\longrightarrow 锐角三角形\\ 在边界上\longrightarrow \mathrm{Rt}三角形\begin{cases}外心在斜边中点\\ 重心在直角顶点\end{cases}\\ 在三角形外\longrightarrow 钝角三角形\end{cases}$$

（4）▲周长与面积

周长 L=a+b+c　　面积 S= $\frac{1}{2}$absinc= $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，p 为半周长

（等底等高等面积；若等高，面积比等与底边比）

（5）▲全等和相似

三角形相似的判定定理（其他皆为此二种的变形）

① 两个三角形中有两个角对应相等
② 两个三角形两组对边对应成比例，且其夹角相等

概念：相似比 R=相似三角形边长之比

一组相似形中线性比均为 R，面积比为 R^2，体积比为 R^3

全等：R=1 的相似即为全等

全等判定：边角边，边边边，角边角定理可判定两个三角形全等，相似时比全等多了一个角角角判定。周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方

相似：周长、中线、高之比等于相似比；面积之比等于相似比的平方。

（6）特殊三角形

1） $Rt\Delta$

角：∠A+∠B= 90^o　边：▲勾股定理：$a^2+b^2=c^2$

☆对于一个给定的三角形，如果 $a^2+b^2<c^2$（c 为最长边），则该三角形为钝角三角形，反之为锐角三角形

▲常用的勾股数：（3，4，5），（5，12，13），（7，24，25），（1，1，$\sqrt{2}$），（1，$\sqrt{3}$，2），（9，40，41）

（观察够股数发现以下特点 1、首数字为基数；2、其周长为 $n^2+n=n(n+1)$。

●例 1、$Rt\Delta$，直角边最短为 17，求周长？

周长为 $n^2+n=n(n+1)=17\times18=306$

▲(2)等腰直角，　　角度 45°　45°　90°　三边　1:1:$\sqrt{2}$

等差数列直角， 角度 30° 60° 90° 三边 1：$\sqrt{3}$：2

30^o 所对的边是斜边的一半

一般 $Rt\Delta$，外接圆半径 $R=\dfrac{C}{2}$ ， 内接圆半径 $r=\dfrac{a+b+c}{2}$

▲等腰Δ $h=\sqrt{a^2-\dfrac{c^2}{4}}$，$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

（3）★等边三角形：四心合一，当边长为 a,

面积 s= $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$，

内切圆半径 r= $r=\dfrac{h}{3}=\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$，

外接圆半径 R= $R=\dfrac{2h}{3}=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}=2r$

(4)射影定理

3、四边形

（1）平行四边形

两组对边分别平行的四边形。两组对边分别相等，两组对角线互相平分

面积为底乘以高

（2）▲矩形（正方形）

对角线 $l=\sqrt{a^2+b^2}$，面积 $S=a\bullet b$，$c=2(a+b)$

▲阴影部分都为 $\dfrac{1}{2}S$

（3）菱形

四边长均为 a 的四边形。

对角线互相垂直平分面积还可以表示为对角线乘积的一半

（推广：只要对角线相互垂直，四边形面积就可以表示为对角线乘积的一半）

（4）梯形

只有一组对边平行的四边形。上底为 a，下底为 b，中位线 l=1/2(a+b)

则 $S=\dfrac{1}{2}(a+b)h=lh$

特殊梯形：

★等腰梯形：$h=\sqrt{c^2-\dfrac{(b-a)^2}{4}}$

★直角梯形：$h=\sqrt{c^2-(b-a)^2}$ $S=\dfrac{a+b}{2}\bullet h$

★对角线互相垂直：$S=\dfrac{1}{2}l_1l_2$

4、圆

（1）了解角度、弧度

常用有 $\dfrac{\pi}{6}=30°$ $\dfrac{\pi}{4}=45°$ $\dfrac{\pi}{3}=60°$ $\dfrac{\pi}{2}=90°$

$\pi=180°$ $2\pi=360°$

（2）弧度，把圆弧长度和半径的比值称为对一个圆周角的弧度。

（3）圆的圆心为 o，半径为 r，直径为 d，则

周长 $C=2\pi r$， 面积 $S=\pi r^2$

★ 直径所对的圆周角是直角

★ 弧所对应的圆周角是圆心角的一半，等弧上的圆心角（圆周角）等

★ 弦切角（割线与切线所夹的角）与圆周角（切线与割线所夹的弧所对应的圆周角）相等

5、扇形

（1）扇形弧长：$l=r\theta=\frac{\alpha^{\circ}}{360}\times 2\pi r$，其中 θ 为扇形角的弧度，α 为扇形角的角度，r 为扇形半径，

▲扇形面积：$S=\frac{\alpha^{\circ}}{360}\times\pi r^2=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\theta r^2$

＊总结

弧：优弧、劣弧 （其中优弧大于半个圆）；弦：线段 （最长的弦为直径）

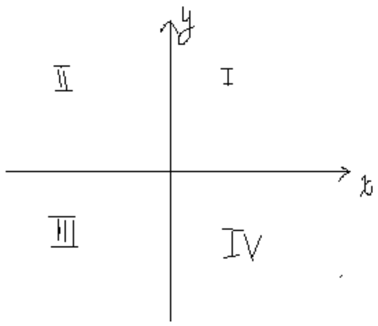
弓形：弧+弦；扇形：弓形+半径；圆心角：顶点在圆心

圆周角：顶点在圆周上 （圆心角是圆周角的 2 倍）；弦切角：切线与弦的夹角

弦心距：圆心之间的距离

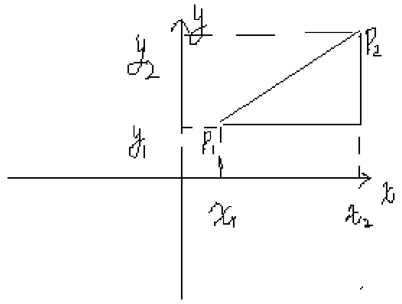
解析几何部分

1、平面直角坐标系



（逆时针 I 、II、III、IV，注意各个象限中坐标点的符号，数轴上的点不属于任何象限。）

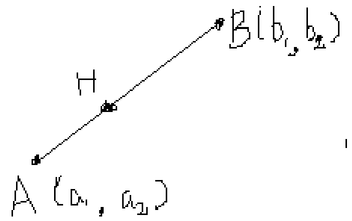
（1）点（与坐标一一对应）



两点之间的距离 $P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

（利用直角三角形勾股定理推出）

（2）线段（定比分点）了解



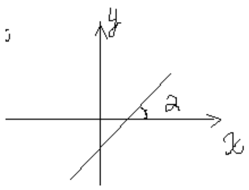
$\lambda=\dfrac{AH}{HB}$ ，H 的坐标（$\dfrac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda},\dfrac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda}$） 可以由三角形相似推出

（H 为 AB 中点时，即 λ=1，H 的坐标为（$\dfrac{a_1+b_1}{2},\dfrac{a_2+b_2}{2}$）用的最多的情况。）

（3）直线

点→线段→射线→直线

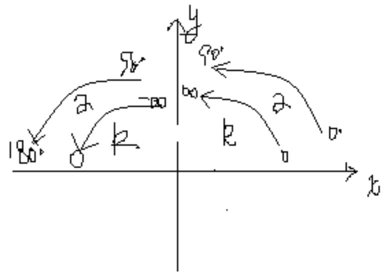
1）倾斜角、斜率



倾斜角是指直线与 x 轴正方向所形成的夹角，范围为[0°，180°），即 0°≤α<180°。

斜率：k=tanα=$\dfrac{对边}{临边}$ （α 的正切值）

▲它描述直线的陡缓程度，当$|k|$越大，直线越陡，当$|k|$越小，直线越缓。



* 总结

①倾斜角越大，斜率也越大

②斜率的绝对值越大，越靠近 y 轴

常用角度：

几个特殊角度的正切值

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
K	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2）直线的方程描述

★一般式：ax+by+c=0 （常用）

即 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$， $k=-\dfrac{a}{b}$

▲斜截式：y=kx+b

k 为斜率，b 为截距（x=0，y=b）

（注：斜截式不能表示竖直的直线。）

★点斜式：$y=k(x-x_0)+y_0$

k 为斜率，(x_0, y_0)为定点

（注：点斜式不能表示竖直的直线。）

▲截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

a, b 分别表示 x 轴、y 轴的截距；斜率：$-\dfrac{b}{a}$

(注：截距不是距离，只表示坐标轴交点的坐标，可正可负。
截距式无法表示水平、竖直和过原点的直线)

▲两点式：$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$，线过（$x_1, y_1$）（$x_2, y_2$）两点

(注：两点式不能表示水平和垂直的直线。)

●思考：这五种表示直线的方法中范围的大小？

一般式 $\xrightarrow{\text{大}}$ 斜率式、点斜式 $\longrightarrow$ 两点式 $\xrightarrow{\text{小}}$ 截距式

3）两条直线的位置关系（同一平面）

位置关系：平行（无交点）

相交（垂直、重合）

▲判断方法：

l_1： $a_1x+b_1y+c_1=0$ $\qquad y=k_1x+b_1$

l_2： $a_2x+b_1y+c_2=0$ $\qquad y=k_2x+b_2$

位置关系	a、b、c 特点	k 、b 特点
平行	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$	$k_1=k_2$且$1\neq 2$
相交	$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$	$k_1\neq 2$
垂直	$a_1a_2+b_1b_2=0$	$k_1k_2=-1$
重合	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$	$k_1=k_2, b_1=b_2$

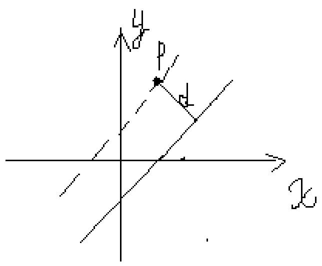
▲用交叉系数判断平行和垂直：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$

设两条直线的方程分别为：

平行： $A_1B_2=A_2B_1$

垂直： $A_1A_2+B_1B_2=0$

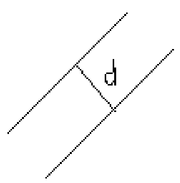
4）★点到直线的距离



过直线外一点 p（x_0，y_0）做直线 ax+by+c=0 的垂线 $\qquad d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(推导：过 p 做已知直线的平行线)

5）▲两平行直线的距离



l_1： $a_1x+b_1y+c_1=0$

l_2：$a_2x+b_1y+c_2=0$

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6）两条直线的夹角

$$\tan\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$$

2、圆

（1）圆的方程

一般式：$x^2+y^2+ax+by+c=0$

配方得：$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

圆心为：（$\frac{a}{2}$，$\frac{b}{2}$），半径为$\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

★特殊：若 c=0，则圆心过原点，
若 a=0，则圆心在 y 轴，
若 b=0，则圆心在 x 轴。

标准式：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$， 圆心为（x_0，y_0），r 为该圆半径。

★特殊：x_0=r 或-r 时，圆与 y 轴相切
y_0=r 或-r 时，圆与 x 轴相切

（2）▲点与圆的位置关系

点在圆内：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$

点在圆上：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

点在圆外：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>r^2$

（3）★直线与圆的位置关系

设直线到圆心的距离为 d，圆的半径为 r，则：

d ＞ r ——直线与圆相离
d ＝ r ——直线与圆相切（有一个交点）
d ＜ r ——直线与圆相交（特指有两个交点）
（注：有交点有相切、相交分别讨论。）

（4）★圆与圆的关系

设两圆圆心的距离为 d，两圆的半径分别为 R 和 r，则：

	公切线
d ＞ R+r ——两圆相离	4
d ＝ R+r ——两圆外切	3
R-r ＜ d ＜ R+r ——两圆相交	2
d ＝ R-r ——两圆内切	1
d ＜ R-r ——两圆内含	0

* 总结 1、外离时，2 公共内切线的交点在圆心连线上

2、外切时，公切线与圆心连线垂直。

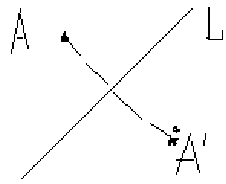
3、内切时，公切线与圆心连线垂直。

3、有关对称的问题

（1）点关于点对称

思路：用中点坐标求解

（2）点关于直线的对称



已知 A（x_0，y_0），

直线 L 的方程为 y=kx+b

设 A′（x_1，y_1）

则根据 A A′ ⊥直线 L 和 A A′ 中点在直线 L 上列方程

●例 1、A(2,7)，求关于 x-y+2=0 的对称点 A’

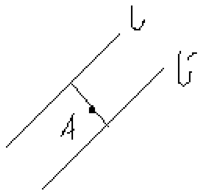
解：法一，设对称点 A’为（x.y）

$$\begin{cases} \dfrac{y-7}{x-2}=-1 \\ \dfrac{x+2}{2}-\dfrac{y+7}{2}+2=0 \end{cases} \text{得，} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}, \quad A'(5,4)$$

法二，把 $x=2$ 代入 x-y+2=0，得 y＝4，

把 $y=7$ 代入 x-y+2=0，得 x＝5， A’(5, 4)

（3）直线关于点的对称



方法：

（1）$l' \parallel l$；

（2）A 到 l 的距离=A 到 l' 的距离。

如， ax+by+c=0 关于 $P(x_p, y_p)$ 对称，

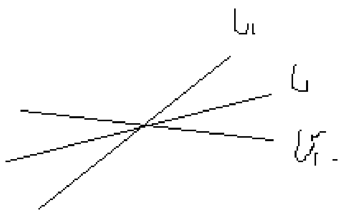
则对称直线方程为 $a\left(2x_p-x\right)+b\left(2y_p-y\right)+c=0$

●例 1、3x-2y+1=0 关于（1,3）对称的直线方程为

解：3(2-x)-2(6-y)+1=0 即 3x-2y+5=0

（试用熟悉的方法验证一下结果。）

（4） 两相交直线的对称（光的反射）



$$\text{方法}\begin{cases}\text{三线共点} \\ \text{夹角相等求斜率} \\ \text{（1上任取一点对称到1' 上）}\end{cases}$$

●例 1、求 2x-y+4=0 关于 y-x+3=0 的对称直线。

解：法一，在直线 2x-y+4=0 取一点（-2，0）

关于 y-x+3=0 直线的对称点为（3，-5），

则可求出 $y=\frac{1}{2}(x+7)-10$

法二，从对称直线 y-x+3=0 中得， y=x-3， x=y+3

由于其斜率相同，可得到 2(y+3)-(x-3)+4=0

（注：法二中用到反代法）

*总结　如果对称轴为 y=±x+m，即斜率为$\begin{cases}互为相反数\\互为倒数\\互为负倒数\end{cases}$

可采用反代方式求解

（5） 两平行直线对称

方法$\begin{cases}斜率相等\\间距相同\end{cases}$

L: ax+by+c=0

L_1： $ax+by+c_1=0$

所求直线为 $ax+by+(2c_1-c)=0$

*总结 点和直线关于点或者直线的对称方程

特殊对称 (a,b) 　Ax+By+C=0

（1）关于 x 轴 $(a,-b)$ 　Ax-By+C=0

（2）关于 y 轴 $(-a,b)$ 　-Ax+By+C=0

（3）关于原点 $(-a,-b)$ 　Ax+By-C=0

（4）关于 y=x (b,a) 　Bx+Ay+C=0

（5）关于 y=-x $(-b,-a)$ 　Bx+Ay-C=0

（6）(a,b) 关于 y= x+m 的对称点是（b-m, a+m）

（7）(a,b) 关于 y=- x+m 的对称点是（-b+m, -a+m）

（8）(a,b) 关于 x=m 的对称点是（2m-a, b）

（9）(a,b) 关于 y=n 的对称点是（a, 2n-b）

（10）(a,b) 关于 （m， n） 的对称点是（2m-a, 2n-b）

- 例 1、已知三角形 ABC 的面积为 a,（a >0），将三边分别延长一倍、两倍、三倍，求三角形 A’B’C’的面积。

解：以等边三角形为例子，画好图，用分割法把延长后的三角形分成若干个，反复利用等高、不同底得到面积之比，最后把分割的三角形全部相加起来得结果 18a。

4. . ▲求阴影部分面积（必考）

常用的方法与技巧

（1） 割分法：S阴影=S规则-S空白

（2） 对称性：利用倍数求出一部分面积

（3） 翻转：折叠问题，找全等

（4） 相似（平行）：面积比等于相似比的平方

（5） 借助同比等高

（6）　进行分块编号 a, b, c……1, 2, 3……
（7）　辅助线：连线、中线、垂线、平行线、角平分线

立体几何

1、体积公式：

柱体：$V = S \cdot h$，圆柱体：$V = \pi r^2 \cdot h$。

斜棱柱体积：$V = S' \cdot l$（其中，S'是直截面面积，l是侧棱长）；

锥体：$V = \frac{1}{3} S \cdot h$，圆锥体：$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$。

台体：$V = \frac{1}{3} \cdot h(S + \sqrt{S \cdot S'} + S')$，

圆台体：$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2)$

球体：$V = \frac{4}{3}\pi r^3$。

3、侧面积：

直棱柱侧面积：$S = c \cdot h$，斜棱柱侧面积：$S = c' \cdot l$；

正棱锥侧面积：$S = \frac{1}{2} c \cdot h'$，正棱台侧面积：$S = \frac{1}{2}(c + c')h'$；

圆柱侧面积：$S = c \cdot h = 2\pi rh$，圆锥侧面积：$S = \frac{1}{2} c \cdot l = \pi rl$，

圆台侧面积：$S = \frac{1}{2}(c + c')l = \pi(R + r)l$，球的表面积：$S = 4\pi r^2$。

5、几个基本公式：

弧长公式：$l = \alpha \cdot r$（α是圆心角的弧度数，$\alpha > 0$）；

扇形面积公式：$S = \frac{1}{2} l \cdot r$；

圆锥侧面展开图（扇形）的圆心角公式：$\theta = \frac{r}{l} \cdot 2\pi$；

圆台侧面展开图（扇环）的圆心角公式：$\theta = \frac{R - r}{l} \cdot 2\pi$。

经过圆锥顶点的最大截面的面积为（圆锥的母线长为l，轴截面顶角是θ）：

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot l^2 \sin\theta & (0 < \theta \le \frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{2} \cdot l^2 & (\frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \end{cases}$$